Βόμβα



τρομοκρατικής οργάνωσης

Μια τρομοκρατική οργάνωση έχει τοποθετήσει ένα σφαιρικού σχήματος εκρηκτικό μηχάνημα στον χώρο των αποσκευών ενός αεροπλάνου.

Ο όγκος V του κρατήρα που θα προκληθεί κατά την έκρηξη στον αέρα είναι συνάρτηση των εξής μεγεθών:

Της πυκνότητας ρ του χώρου αποσκευών, της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g της μάζας Γ γόμωσης, του βάθους h μέσα στον χώρο αποσκευών, πυκνότητας δ του εκρηκτικού, και της ειδικής ενέργειας E_s, δηλαδή ενέργειας ανά μονάδα μάζας της γόμωσης .

Να βρεθεί ο όγκος V του κρατήρα που θα προκληθεί στον χώρο αποσκευών σε συνάρτηση των παραπάνω μεταβλητών.

Απάντηση:

Εκφράζουμε τα μεγέθη του προβλήματος συναρτήσει των θεμελιωδών μεγεθών :
T χρόνος, L μήκος , M μάζα:

$[V] = L^3$ $\qquad [\rho] = ML^{-3}$

$[g] = LT^{-2}$ $\qquad [\Gamma] = M$

$[h] = L$ $\qquad [\Delta\delta] = ML^{-3}$

$$E_s = [\frac{\text{ενέργεια}}{\text{μάζα}}] = \frac{[\frac{MLL}{T^2}]}{[M]} = L^2T^{-2}$$

Το γινόμενο των μεταβλητών αυτών θα είναι της μορφής :

$V^a \rho^b g^c \Gamma^d h^e \delta^f E_s^g$ και απαιτούμε να είναι αδιάστατο ως προς τα T, L, M, δηλ:

$V^a \rho^b g^c \Gamma^d h^e \delta^f E_s^g = T^0 M^0 L^0 \Leftrightarrow$

$$\left(L^{3}\right)^{a}\left(ML^{-3}\right)^{b}\left(LT^{-2}\right)^{c}M^{d}L^{e}\left(ML^{-3}\right)^{f}\left(L^{2}T^{-2}\right)^{g}=T^{0}M^{0}L^{0}\Leftrightarrow$$

$$T^{-2c-2g}M^{b+d+f}L^{3a-3b+c+e-3f+2g}=T^{0}M^{0}L^{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2c-2g=0\\ b+d+f=0\\ 3a-3b+c+e-3f+2g=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b+c+e-3f+2g=0\\ b+d+f=0\\ -2c-2g=0\end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν τον πίνακα Α του οποίου θα βρούμε την διάσταση rank(A)

$$A=\begin{bmatrix}3&-3&1&0&1&-3&2\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&-2&0&0&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{L_3\to\frac{1}{2}L_3}\begin{bmatrix}3&-3&1&0&1&-3&2\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\to -L_3+L_1}$$

$$\begin{bmatrix}3&-3&0&0&1&-3&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\to 3L_2+L_1}\begin{bmatrix}3&0&0&3&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1\to\frac{1}{3}L_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Η τάξη του πίνακα Α είναι rank(A)=3. Οπότε ο χωρος λύσεων V έχει διάσταση dimV=7-3=4.

Τότε , επιλέγω αυθαιρέτως 4 ελεύθερους αγνώστους (d, e, f, g)και το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases}a+d+\frac{1}{3}e+\frac{1}{3}g=0\\ b+d+f=0\\ c+g=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-d-\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}g\\ b=-d-f\\ c=-g\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$(a,b,c,d,e,f,g)=(-d-\frac{1}{3}e-\frac{1}{3}g,-d-f,-g,d,e,f,g)$$

Δηλαδή η λύση θα είναι υπόχωρος του Ñ^{7} ισόμορφος του Ñ^{4} που θα παράγεται από την τετράδα (d, e, f, g).

Θα πάρουμε λοιπόν για (d, e, f, g) τα διανύσματα (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0),

(0, 0, 1, 0) και (0, 0, 0, 1) και θα βρούμε αρχικά την αντίστοιχη λύση του συστήματος και στην συνέχεια τα αδιάστατα γινόμενα. Θέτουμε κάθε φορά έναν ελεύθερο άγνωστο ίσο με 1 και τους υπολοίπους ίσους με 0 , οπότε θα πάρω 4 διανύσματα, έναν για κάθε ελεύθερο άγνωστο, γραμμικώς ανεξάρτητα, όπως παρακάτω:

(1, 0, 0, 0) -> (-1, -1, 0, 1, 0, 0, 0)
(0, 1, 0, 0) -> (-1/3, 0, 0, 0, 1, 0, 0)
(0, 0, 1, 0) -> (0, -1, 0, 0, 0, 1, 0)
(0, 0, 0, 1) -> (-1/3, 0, -1, 0, 0, 0, 1) , που αντιστοιχούν στα γινόμενα:

$\Pi_1=V^{-1}\rho^{-1}\Gamma$, $\Pi_2=V^{-1/3}h$, $\Pi_3=\rho^{-1}\delta$, $\Pi_4=V^{-}$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Backingham υπάρχει συνάρτηση f : $f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)=0$. Εφόσον αναζητούμε τύπο για τον όγκο V, θα λάβουμε μια $\varphi(\Pi_3)$ συναρτήσει των υπολοίπων αδιάστατων γινομένων.

Με δοκιμή ενδεχόμενων συνδυασμών για τα Π_1, Π_2, Π_4 ως γινόμενο, ως πηλίκο δύο ανά το τρίτο κτλ , ο συνδυασμός που δίνει μια απλούστερη σχέση για το V, (επειδή απλοποιείται ο όρος $V^{-1/3}$) είναι λ. χ . η

$$\frac{\Pi_1\Pi_4}{\Pi_2}=\phi(\Pi_3)\Rightarrow\frac{V^{-1}\rho^{-1}\Gamma V^{-1/3}g^{-1}E_s}{V^{-1/3}h}=\phi(\rho^{-1}\delta)\Rightarrow V=\frac{\Gamma E_s}{\rho g h\phi(\rho^{-1}\delta)}$$



Πόση ώρα θέλει σούβλισμα το αρνί του Πάσχα;

Έστω t ο χρόνος που πρέπει να ψήσουμε το αρνί. Ο χρόνος t εξαρτάται από το πάχος (μέγεθος) του αρνιού. Το μέγεθος του αρνιού το μετράμε με το μήκος του l. Επίσης εξαρτάται από την διαφορά θερμοκρασίας $\Delta\theta_\alpha$ του κρύου αρνιού από την θερμοκρασία που έχει η φωτιά και την διαφορά θερμοκρασίας $\Delta\theta_\psi$ του ψημένου αρνιού από την θερμοκρασία της φωτιάς. Τέλος εξαρτάται από μια σταθερά θερμικής αγωγιμότητας $k = \dfrac{\dfrac{\text{ενέργεια}}{\text{επιφάνεια x χρόνο}}}{\dfrac{\text{θερμοκρασία}}{\text{μήκος}}}$.

Να εκφραστεί ο χρόνος ψησίματος t, ως συνάρτηση των παραπάνω μεταβλητών, αν οι διαφορές θερμοκρασίας μετρούν ενέργεια/μονάδα όγκου.

Απάντηση

Εκφράζουμε τις μεταβλητές του προβλήματος συναρτήσει των βασικών μεταβλητών, όπως και στο προηγούμενο :

L μήκος, T χρόνος, και M μάζα.

Ισχύει:

$$[F]=[m\,\gamma]=[m\frac{\upsilon}{t}]=[m\frac{\frac{s}{t}}{t}]=[m\frac{s}{t^2}]=M^0L^1T^{-2} \qquad (1)$$

$$[E]=[F\,s]\overset{(1)}{=} MLT^{-2}L=M^1\,L^2T^{-2} \qquad (2)$$

$$[\theta]=M^0\,L^0T^0 \qquad (3)$$

Για την $\Delta\theta_\alpha$ και $\Delta\theta_\psi$ έχω:

$$[\Delta\theta_\alpha]=[\Delta\theta_\psi]=[\frac{E}{V}]=[\frac{F.S}{V}]=[\frac{m.\gamma.S}{V}]\overset{(2)}{=}\frac{ML^2T^{-2}}{L^3}=M^0L^{-1}T^{-2}\,. \quad (4)$$

Για το κ έχουμε:
$$[\kappa]=[\frac{\frac{E}{S.t}}{\frac{\theta}{l}}]=[\frac{E.l}{S.t.\theta}]\overset{(2)(3)(4)}{=}\frac{ML^2T^{-2}L}{L^2T}=M^0L^1T^{-3}\,. \quad (5)$$

Το γινόμενο των μεγεθών αυτών θα είναι της μορφής:

$t^\alpha\, l^\beta(\Delta\theta_\alpha)^\gamma(\Delta\theta_\psi)^\delta\kappa^\varepsilon$.

Για να είναι αδιάστατο ως προς T, M, L , θα πρέπει να ισχύει:

$[t^\alpha\, l^\beta(\Delta\theta_\alpha)^\gamma(\Delta\theta_\psi)^\delta\kappa^\varepsilon]=T^0\,M^0\,L^0$ ñ

$T^\alpha\,L^\beta\,(ML^{-1}\,T^{-2})^\gamma\,(ML^{-1}\,T^{-2})^\delta\,(ML\,T^{-3})^\varepsilon= T^0\,M^0\,L^0$ ñ

$T^{\alpha-2\gamma-2\delta-3\varepsilon}\,L^{\beta-\gamma-\delta+\varepsilon}\,M^{\gamma+\delta+\varepsilon} = T^0\,M^0\,L^0$ ñ

$$\begin{cases}\alpha-2\gamma-2\delta-3\varepsilon=0\\ \beta-\gamma-\delta+\varepsilon=0\\ \gamma+\delta+\varepsilon=0\end{cases}$$

Έχω δηλαδή ένα γραμμικό ομογενές σύστημα 3 εξισώσεων με 5 αγνώστους.

Βρίσκω την τάξη του πίνακος εκτελώντας τους διαδοχικούς ισοδύναμους μετασχηματισμός με «γραμμοπράξεις»

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-2&-2&-3\\0&1&-1&-1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+2\Gamma_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&-1&-1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}=B$$

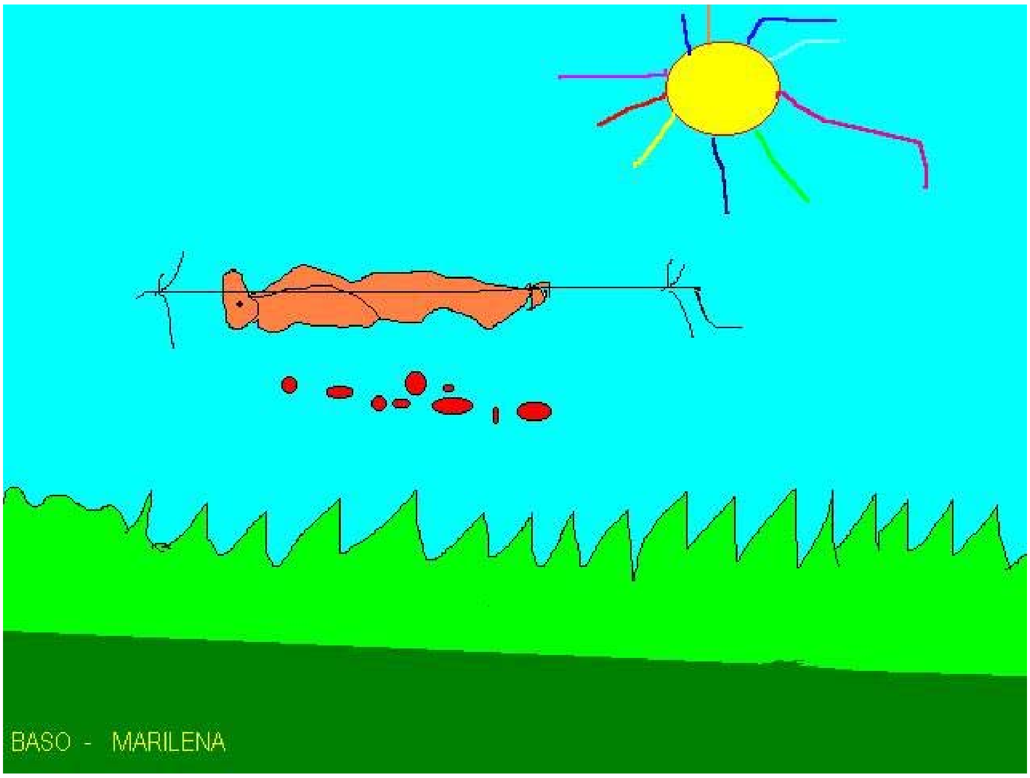
Άρα rank(A)=3
Ο χώρος λύσεων έχει διάσταση:(Αριθμός αγνώστων Συστήματος)-rank(A) =5-3=2.
Επιλέγω αυθαιρέτως δύο αγνώστους, (λ.χ. δ και ε) και εκφράζω τους υπολοίπους συναρτήσει αυτών.
Έτσι θα έχω:

$$\begin{cases}a-\varepsilon=0\\ \beta+2\varepsilon=0\\ \gamma+\delta+\varepsilon=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\varepsilon\\ \beta=-2\varepsilon\\ \gamma=-\delta-\varepsilon\end{cases}$$

Οπότε (α, β, γ, δ, ε)=(ε, -2ε, -δ-ε, δ, ε) με ε,δ ελεύθερες μεταβλητές œÑ (6)
Άρα στον $Ñ^5$ οι λύσεις θα είναι υπόχωρος του $Ñ^5$ της μορφής (δ, ε, 0, 0, 0), που είναι ισόμορφος με τον υπόχωρο του $Ñ^2$ που παράγεται από το ζεύγος (δ,ε). Για(δ=0 και ε=1) (δ=1 και ε=0) στην (6) προκύπτουν αντιστοίχως οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που παράγουν τον χώρο (1, -2, -1, 0, 1) και (0, 0, -1, 1, 0) αντίστοιχα.(Βάση του χώρου λύσεων)
Έτσι προκύπτουν τα αδιάστατα γινόμενα: $\Pi_1=tl^{-2}(\Delta\theta_\alpha)^{-1}\kappa$ και $\Pi_2=(\Delta\theta_\alpha)^{-1}(\Delta\theta_\psi)^{1}$. Τότε από το θεώρημα του Backingham θα υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(\Pi_1, \Pi_2)=0$. Έστω ότι $\Pi_1=\varphi(\Pi_2)$. Οπότε θα έχουμε:

$$tl^{-2}(\Delta\theta_\alpha)^{-1}\kappa=\varphi((\Delta\theta_\alpha)^{-1}(\Delta\theta_\psi)^{1}) \Rightarrow$$

$$t=\frac{l^2\Delta\theta_\alpha}{\kappa}\varphi\left((\Delta\theta_\alpha)^{-1}(\Delta\theta_\psi)^{1}\right).$$


BASO - MARILENA